チュートリアル

計算機技術が飛躍的に進歩した現在においても、計算工学の根底を支える学問としての連続体力学の重要性が失われることはありません。連続体力学の数理的な基礎となるテンソル代数・テンソル解析について、きちんと学びたい、改めて学び直したい、と考える読者も少なくないのではないでしょうか。そこで本チュートリアルでは、東京電機大学の登坂宣好先生に、連続体力学のためのテンソル代数・テンソル解析の基礎について、解説をお願いいたしました。なお、チュートリアル記事は1ページ目のみを本誌に掲載し、続きは日本計算工学会HP上で公開していますので、そちらも併せてご参照ください。

テンソル代数・テンソル解析
ー連続体力学の数理的基礎ー

第1講 連続体力学とテンソル
ーなぜテンソルが必要なのかー

登坂 宣好

チュートリアル連載にあたって

計算工学が目覚しい進展を遂げ、計算力学も多様化している現在でもその理論的ベースとしての連続体力学を学ぶことの重要性は失われていない。

筆者は機械工学専攻の修士を対象として連続体力学を担当し、前期15 回の講義を行っている。その講義を行う上で毎年悩むことは、その数理的基礎であるテンソル代数とテンソル解析に当てる講義回数である。講義の主体は連続体力学の理論展開であるから、その数理的基礎は極めて重要であるにも拘わらず最初の数回とならざるを得ない。したがって、テンソルに関する体系的な理論を講じるよりも概説となっている。テンソルに関する独立な科目が設置されている場合には、このような悩みは少なくなるであろうが、設置されていることが少ない現状では、悩みの種は尽きない。

テンソルに関するこのような状況は、連続体力学の成書も同様で、その内容全体の一部として記述されていることが多い。大学生の数学力の低下が叫ばれている状況下で、各教育機関における連続体力学の担当者はこの点をどのように解決しているのであろうか、参考のために伺ってみたい。

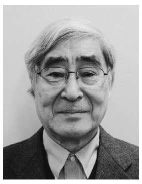
本チュートリアルは、上述した悩みを解決しようとしている筆者のささやかな試みを本誌のページ数の制限から完全な証明なしの講義ノートという形式で提示したい。その主旨および方法を以下に述べておく。

(1) 工学系大学教養数学としての線形代数学と微積分学における基礎知識をベースとしたテンソル代数とテンソル解析を展開する。
(2) テンソルを線形空間上で定義された線形写像として位置づける。
(3) 線形空間の双対空間の果たす役割を重視する。
(4) 線形空間およびユークリッド線形空間（内積空間）の基底として標準基底に限定することなく任意の基底を採用することによって、具体的な表現を与える。
(5) テンソル場（スカラー場とベクトル場を含む）の方向導関数から導写像（微分）を求め、勾配（grad）、発散（div）、回転（rot）を定義し、ベクトル解析からテンソル解析への拡張を与える。

以上の主旨に基づき作成した各回の表題（案）は次の通りである。

1. 連続体力学とテンソル－なぜテンソルが必要なのか－
2. テンソル代数I－テンソルとは何か－
3. テンソル代数II－テンソルの表現－
4. テンソル解析－テンソル場の微積分－

筆者紹介



とさか のぶよし

1971年東京大学大学院工学系研究科博士課程修了、日本大学生産工学部を経て、現在、東京電機大学未来科学部建築学科客員教授。
弾性シェルの非線形理論、積分方程式・境界要素法による連続体力学の数値解法、フィルター理論による逆問題解析等の研究に従事、現在はEngineering Science（基礎工学）教育に関心を有する。日本計算工学会名誉会員。

1 はじめに

科学技術分野における基盤手法として計算力学は広く認知され進展を続けている。現在では、計算力学は力学現象の様々なレベルからの数値的解明を目的として多様化している。計算力学を現象論的な力学現象の数値シミュレーションと限定するとき、その理論的ベースは連続体力学、特に最近では有理連続体力学 (rational continuum mechanics) である [1,2]。したがって、計算力学の教育カリキュラムでは、その基盤知識として、固体力学・流体力学に続き有理連続体力学を講じ、それを理解させることが重要となる。

有理連続体力学は、連続体の各点（物体点）で定義された力学的量の時間・空間的変動を数理的かつ体系的に理論化したものである。数学的にはスカラー・ベクトル・テンソル代数およびそれらの場（スカラー場、ベクトル場、テンソル場）解析である。スカラーとベクトルについては、その解析を含めて学習し理解している。しかし、行列を理解しているもののそれがテンソル（の表現）であることを意識していることは少ないので、テンソル代数および解析に関しては必ずしも十分学習しているとは限らない。したがって、連続体力学の数理的基礎としてのテンソル代数・解析をどのように理解させるのかが講義上のポイントとなる。筆者は既にテンソル代数と解析の体系化に関する試みを提案した [3]。

今回はチュートリアルの導入として、連続体力学におけるテンソル概念の必要性と３種類のテンソルの定義を示す。

2 連続体力学序説

まず始めに有理連続体力学で用いられている力学的量の特徴を明らかにするために、その基本関係式を主として、文献 [4,5] に従って示しておく。なお、以下に示すように基本関係式は、いわゆる座標系に依存しないシンボル的表現であり、各量の基底による成分表示をしていない。

1. 変形 (deformation)

   (a) 変形勾配 (deformation gradient)

   $$\boldsymbol{F} := Grad\ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{X}}$$
   $$(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}[\boldsymbol{X}])$$

   (b) Cauchy-Green 歪 (Cauchy-Green strain)

   $$\boldsymbol{C} := \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{B} := \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$$

   (c) 微小歪 (infinitesimal strain)

   $$\boldsymbol{E} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^T)$$

   (d) 微小回転 (infinitesimal rotation)

   $$\boldsymbol{W} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^T)$$

   (e) 適合条件式 (compatibility equation)

   $$rot\ rot\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$$

2. 応力 (stress)

   (a) Cauchy 応力 (Cauchy stress)

   $$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}[\boldsymbol{n}]$$

   (b) Piola-Kirchhoff 応力 (Piola-Kirchhoff stress)

   $$\boldsymbol{S} := (\det \boldsymbol{F})\boldsymbol{T}_m \boldsymbol{F}^{-T}$$

   (c) 釣合式 (equilibrium equations)

   $$div\ \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$$
   $$Div\ \boldsymbol{S} + \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{S}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}^T$$

   (d) 応力関数 (stress function)

   $$\boldsymbol{T} = rot\ rot\ \boldsymbol{A} \quad (div\ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0})$$

3. 構成式 (constitutive equations)

   $$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{F}}[\boldsymbol{C}]\boldsymbol{F}^T$$
   $$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{S}}[\boldsymbol{C}]$$

以上に示したように連続体力学における基礎概念は、変形（運動)、応力および物体の力学的性質を表現する構成式である。これらの概念を表すための数学的量は、代数的にはベクトル ($\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$) とテンソル ($\boldsymbol{F}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}$) であり、それらが物体点または空間点に依存する量としてのベクトル場とテンソル場となる。この各場の微分量として勾配 ($Grad$)、発散 (div, Div)、回転 (rot) が変形勾配や歪および釣合式に現れている。したがって、連続体力学理論の数理的基礎は線形写像空間の元としての代数および場としてのテンソル解析である。

3 テンソル概説

前章で、有理連続体力学の中でも固体の静力学を対象として、その力学的現象を支配する基本関係式を示した。そこに現れる量は、代数的に変形や変位および物体力と接触力を表すベクトルと変形勾配、Caucyh-Green 歪、Cauchy 応力、Piola-Kirchhoff 応力を表すテンソルである。もちろんこれらの諸量は、物体点または空間点に依存して定まるので、正確にはそれぞれベクトル場、テンソル場である。

これらのテンソル量は、力学現象をどのような座標フレームで記述するのかを明示することなくシンボル的に表現されている。普通、テンソルと言うと、文字に沢山の上下の添字が付けられて表されている。このような添字による表記は、座標系の選び方に依存する

ことになる。本チュートリアルでは、テンソルを線形空間上の線形写像と見る立場を採用する。ただし、このような見方はテンソルのタイプ（共変、反変、混合）の中でも２階混合テンソルに限定することになる。このように限定的になるが、連続体力学では、この見方が重要である。

なお、一般的には、線形写像を拡張した双線形写像、特に双線形関数さらに、多重線形写像（多重線形関数）に基づくテンソルの定義も必要となる。

以下では、２階テンソルに限定して３つの立場からテンソルの定義を示す。なお、概説的に述べるので未定義のままで示す。その詳細については、第２回以降を参照されたい。

3.1 基底変換則とテンソル

テンソルを定義する場合、まず始めにベクトルを対象とする。すなわち、 ベクトルをテンソルの特別な場合として捉え、その結果を一般化する。そこで、ベクトルを抽象的に線形空間の元として定義する。 すると、線形空間に一つの基底を選ぶことからベクトルは次のように具体的に表現できる。例えば、３次元線形空間 V^3 を考え、その基底を $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ とすると、任意のベクトル a は、これらの３つの基底ベクトルの線形結合として次のように表される。

$$
\begin{aligned}
a &= a^1 g_1 + a^2 g_2 + a^3 g_3 \\
&= \sum_{i=1}^{3} a^i g_i \equiv a^i g_i
\end{aligned} \tag{1}
$$

この表現における３つの係数 a^1, a^2, a^3 を基底 G に関するベクトルの成分とよぶ。、

なお、上記の表現において総和記号を省略し、式中に同じ添字が現れた場合は、その添字に関して、総和を取るものとする、いわゆる“総和に関する略記法”を用いている。今後本チュートリアルではこの略記法を多用する。

ベクトルが、基底の選び方を変えた場合、すなわち基底変換をした場合、その成分がどのように変化するのかを考える。もちろん、線形空間の元としてのベクトルは基底の選び方に依存しない量であるが、その成分は式 (1) のように基底に依存することになる。ここで、基底を前記の G から $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ に変換する。すると、各基底ベクトルは同一の線形空間のベクトルであるからお互いに次のように関係付けられることになる。

$$
f_i := P_i^j g_j \ , \quad g_i := Q_i^j f_j \tag{2}
$$

$$
(\ P_l^i Q_j^l = \delta_j^i, \ \ Q_l^i P_j^l = \delta_j^i\ )
$$

ここで、実数の組 P_i^j, Q_i^j を行列の成分として行列表現すると、それらは基底変換行列とよばれている。

ベクトル a の２つの基底に関する表現を次のように表すことにする。

$$
a = a^i g_i = b^i f_i \tag{3}
$$

すると、上記の基底変換に伴って、その成分は次のように変換されることになる。

$$
b^i = Q_j^i a^j \ , \quad a^i = P_j^i b^j \tag{4}
$$

以上の結果、基底変換 $G \to F$ に伴うベクトルの成分の変換 $a^i \to b^i$ に対しては、基底変換行列 P_j^i ではなく、その逆行列に対応する Q_j^i による。このような成分の変換形式（変換則）を“反変的”(contravariant) であるという。

一方、線形空間上の線形関数（線形汎関数）を ϕ とする。基底 G と F の双対基底をそれぞれ $\Sigma = \{\sigma^i\}$ と $\Gamma = \{\gamma^i\}$ とし、

$$
\phi = \phi_i \sigma^i = \psi_i \gamma^i \tag{5}
$$

と表すと、その成分 ϕ_i は、基底変換行列に対応する P_i^j によって次のように変換されることが分かる。

$$
\psi_i = P_i^j \phi_j \tag{6}
$$

この場合の成分の変換則は、基底変換と同じ P_i^j によって与えられるので、反変と区別して、“共変的” (covariant) であるという。そこで、線形空間の元を“反変ベクトル”、線形空間上の線形関数（すなわち、双対空間の元）を“共変ベクトル”とよんで区別している。なお、双対空間と双対基底については第２講で詳述する。

このように基底変換に伴うある量の成分の変換則を基にして、その量を区別することができる。そこで、ある量の成分が、次のように表現される場合には、その量をベクトルとは区別して“テンソル”とよぶ。

$$
S_j^i = Q_k^i P_j^l T_l^k \tag{7}
$$

$$
S_{ij} = P_i^k P_j^l T_{kl} \tag{8}
$$

$$
S^{ij} = Q_k^i Q_l^j T^{kl} \tag{9}
$$

なお、このテンソルは２階テンソルとよばれ、上記の変換則を満たす各テンソルを、１階反変・１階共変の２階混合テンソル、２階共変テンソル、２階反変テンソルとよぶ。

このような変換則を拡張し、さらなる高階テンソルも定義できることになる。そこで、一般的な高階テンソルの特別な場合として、実数すなわち、スカラーを０階テンソル、ベクトルを１階テンソルと位置づけられる。ここで述べた基底変換に基づいたテンソルの定義は、弾性論の名著として知られている文献 [6] の数学的基礎として詳述されているので参照されたい。

3.2 線形写像とテンソル

任意のベクトル a を他の一つのベクトル b に写像する場合、次式を満たすような特別の写像 $T : V \ \to \ V$ を考える。

$$
T[pa + qb] := p(T[a]) + q(T[b]) \quad (\ p, q \ \in \ \boldsymbol{R}\ ) \tag{10}
$$

このような写像を“線形写像“とよび、ベクトルとは異なる量として“テンソル”とよぶことにする。このテンソルは、線形空間 V に前述した基底 G を選定すると、ベクトルの表現 (1) に対してその写像 T による像は、

$$T[a] = T[a^i g_i] = a^i T[g_i] \equiv a^i T_i^j g_j \tag{11}$$
$$(\ T[g_i] := T_i^j g_j\ )$$

として表される。この時、線形写像 T は2つの添字を有する実数の組 T_i^j で定められので行列表記を用いて表されることが多い。そのような行列は線形写像の“表現行列”とよばれている。

このような線形写像の表現は、線形写像によるベクトルの像の表現であり、線形写像それ自体の表現とはなっていない。そこで、ベクトルの依存性を取り除くために基底 G の双対基底 $\Sigma = \{\ \sigma^i\ \}$ を導入する。すると、$a^i = \sigma^i[a]$ となるので、上式は次のように書き換える。

$$T[a] = \sigma^i[a] T_i^j g_j \equiv T_i^j (g_j\ \odot\ \sigma^i)[a] \tag{12}$$

ただし、ここでは、第2講で詳述する“写像積”(mapping product) に関する次のような演算記号 $\odot$ を用いた定義 [7] を与えることにする。

$$(g_j\ \odot\ \sigma^i)[a] := g_j(\sigma^i[a]) \tag{13}$$

この結果、線形写像は線形空間の基底およびその双対基底の各ベクトルから与えられる写像積の線形結合として次のように表される。

$$T = T_i^j (g_j\ \odot\ \sigma^i) \tag{14}$$

線形写像のこのような表現から、線形写像 T は2階混合テンソルとして位置づけられる。本チュートリアルでは、線形写像をテンソルと捉える立場を採ることにする。その際に、写像積という新しいオペレーションがキーポイントとなる。

なお、この写像積は、線形空間を対象として定義をしたが、もしこの空間がスカラー積が導入されているユークリッド線形空間（内積空間）の場合には、基底として“正規直交基底”が選べるのでその基底ベクトルどうしの写像積は、Gibbs[8] が用いた“ダイアド”(dyad) に対応する。

3.3 双線形関数とテンソル

ここでは、現在多用されているテンソルについて紹介する。線形写像の特別な場合である線形空間上の線形関数（線形汎関数とよばれることが多い）、すなわち、線形空間 V から $\boldsymbol{R}$ への線形写像 $\phi : V\ \to \boldsymbol{R},\ a\ \mapsto\ \phi[a]$ を次のように拡張し、双線形関数とよぶ。

$$M:\ V\ \times\ V\ \to\ \boldsymbol{R},\ \ (a, b)\ \mapsto\ M[a, b]\ \in\ \boldsymbol{R} \tag{15}$$

この双線形関数は、線形関数の拡張であるから2つの線形関数、ϕ, ψ を用いることによって次のように表される。

$$M[a, b] := \phi[a]\psi[b] \tag{16}$$

ここで、2つの線形関数に注目して、それらの線形関数どうしの一種の積と考えられる“テンソル積”(tensor product) を導入して上式は次のように表される（例えば、文献 [9,10,11]）。

$$M[a, b] = (\phi\ \otimes \psi)[a, b] \tag{17}$$

この結果、双線形関数 M は2つの線形関数のテンソル積によってそれ自体が次のように表されることになり、双線形関数のテンソル積表現とよばれている。

$$M = \phi\ \otimes\ \psi \tag{18}$$

この双線形関数は、2つのベクトルの組を変量として実数を与えるような線形写像（線形関数）として定義され、2階共変テンソルとよばれている。したがって、このテンソルは、前項の一つのベクトルを変量とする線形写像によるテンソルとは異なることが分かる。以上より、ここでのテンソル概念は、双線形関数さらに多重線形関数のテンソル積を用いて定義されてるので、線形写像の写像積を用いて定義されたテンソル概念とは異なっている。

なお、線形空間 V とその双対空間 V^* の各ベクトルの組を変量として次のような双線形関数、すなわちテンソルが定義できる。

$$M : V\ \times\ V^*\ \to\ \boldsymbol{R},$$
$$M[a, \psi] = (\phi\ \otimes\ b)[a, \phi] \tag{19}$$
$$M : V^*\ \times\ V\ \to\ \boldsymbol{R},$$
$$M[\phi, b] = (a\ \otimes\ \psi)[\phi, b] \tag{20}$$
$$M : V^*\ \times\ V^*\ \to\ \boldsymbol{R},$$
$$M[\phi, \psi] = (a\ \otimes\ b)[\phi, \psi] \tag{21}$$

これらの双線形関数はいずれも2階テンソルであり、上記の2階テンソルと合わせて、4種類のテンソル積 $\phi\ \otimes\ \psi, \phi\ \otimes\ b, a\ \otimes\ \psi, a\ \otimes\ b$ に基づいて表されている。そこで、これらは、各々2階共変テンソル、1階共変1階反変の2階混合テンソル、1階反変1階共変の2階混合テンソル、2階反変テンソルとよばれ区別されている。 このようなテンソル積から生成される線形空間をテンソル積空間またはテンソル空間とよぶ。

3.4 テンソル積と写像積

ここで、3.2 節で示した本チュートリアルにおけるテンソル概念と 3.3 節で述べた多用されているテンソル概念との関係を明確にするために2階混合テンソル M を対象として示しておく。　双線形写像としての2階混合テンソル M に対して、テンソル積と写像積を用いると、次のように表される。

$$M[\phi, b] = a[\phi]\psi[b] = (a\ \otimes\ \psi)[\phi, b] \tag{22}$$
$$= (\psi[b]a)[\phi] = ((a\ \odot\ \psi)[b])[\phi] \tag{23}$$
$$= (a[\phi]\psi)[b] = ((\psi\ \odot\ a)[\phi])[b] \tag{24}$$

この表現から、２階混合テンソル M は、反変ベクトル a と共変ベクトル ψ のテンソル積 $a \otimes \psi$ として表されると共に、ベクトルの写像積 $a \odot \psi$ または $\psi \odot a$ から定まる線形写像によるベクトルの像のさらなる像として実数値を与える事になる。テンソル積は２変量 (ϕ, b)、一方、写像積は１変量 b または a に関する演算であることが明らかである。

4　テンソルの名称

チュートリアルの第１講を閉じるに当たって、参考のためにスカラー、ベクトル、テンソルの名称について、文献 [12,13] に従い紹介しておく。

実数をスカラーとよぶが、スカラーはスケイルやエスカレーター等と語源を同じくし、単に目盛だけで表される量を意味している。ベクトルは、「移動するもの」を意味するラテン語に由来している。スカラーとベクトルは、Hamilton が名付け親である。なお、ベクトルの演算であるスカラー積（内積）とベクトル積（外積）を初めて定義したのは Grassmann である。さらに、ベクトル解析を完成させたのは、Gibbs と Heaviside である。

一方、テンソルは、粘弾性体のフォークトモデルの提唱者として知られる Voigt がテンション（張力）から名付けた用語である。1900 年頃 Voigt は Cauchy の弾性論 (1822 年) に表されたいわゆる、Cauchy 応力などの２階対称テンソルが座標変換に対してベクトルとは異なる形式を有することに注目し、このような量をテンソルとよぼうと提案した。これは 3.1 節によるテンソルの定義である。なお、現在 Cauchy 応力テンソルとよばれているが、Cauchy は、その弾性論（Cauchy の応力定理）での応力に対して、“ 圧力または張力 ” (pression ou tension) とよび、応力とはよばなかったことを付け加えておく。

前記の Gibbs は、文献 [8] において dyad,triad,polyad の概念に基づいて独自のテンソルの代数的理論を構成した。テンソル解析は、1901 年に発表された Ricci,Levi-Civita の論文で、その内容が整えられたが、テンソルという術語は使用されていなかった。このような状況から文献 [13] では、結論的に“ テンソルの生みの親は、Ricci,Levi-Civita,Gibbs であり、名付け親は Voigt と Einstein であったと思われる ”と述べられている。

謝辞

計算工学が最先端のモノづくりにおいて進展を続けている状況下で、本学会の果たす役割は今後ますます重要となるであろう。その学会誌で、本チュートリアルのような基礎理論を取り上げていただいたことは、本学会がいかに計算工学における基礎理論を重視しているかがわかる。特に、本チュートリアルが、若い研究者や技術者の目にとまり基礎理論を学ぼうとする際の一助となるならば筆者としては大変嬉しいことである。

末尾になりましたが、本誌の編集委員会、特に前委員の高橋昭如先生（東京理科大学）と現担当委員の只野裕一先生（佐賀大学）のご尽力に対して深謝申し上げる。

参考文献

[1] Truesdell,C. and W.Noll: The Non Linear Field Theories of Mechanics (in Encyclopedia of Physics, Vol. III/3),Springer-Verlag, (1965)

[2] 徳岡辰雄（杉山編）: 有理連続体力学の基礎、共立出版、(1999)

[3] 登坂宣好 : 連続体力学とテンソル解析、日本計算工学会計算工学講演会論文集、Vol. 18, (2013)

[4] Gurtin, M.E. : The Linear Theory of Elasticity (in Encyclopedia of Physics, Vol. IVa/2), Springer-Verlag, (1972)

[5] Gurtin, M.E. : An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, (2003)

[6] Green,A.E. and W. Zerna : Theoretical Elasticity (Theoretical Continuum Mechanics), Oxford Univ. Press, (1954)

[7] 登坂宣好 : 有理連続体力学におけるテンソルの表現、日本計算数理工学会誌（計算数理工学レヴュー）、No.2012-12, pp.37-43, (2012)

[8] Gibbs, J.W. : Vector Analysis, Yale Univ. Press, (1902)

[9] ニッカーソン、スペンサー、スティーンロッド（原田、佐藤訳）: 現代ベクトル解析、岩波書店（株）、(1965)

[10] 有馬哲、浅枝陽 : ベクトル場と電磁場　（電磁気学と相対論のためのベクトル解析）、東京図書（株）、(1987)

[11] 新井朝雄 : 現代ベクトル解析の原理と応用、共立出版、(2006)

[12] 太田　浩一 : 電磁気学の基礎 I、東京大学出版会、(2012)

[13] 小松彦三郎 : ベクトル解析と多様体 II, 岩波講座 応用数学 [基礎 6]、岩波書店、(1995)