チュートリアル

計算機技術が飛躍的に進歩した現在においても、計算工学の根底を支える学問としての連続体力学の重要性が失われることはありません。連続体力学の数理的な基礎となるテンソル代数・テンソル解析について、きちんと学びたい、改めて学び直したい、と考える読者も少なくないのではないでしょうか。そこで本チュートリアルでは、東京電機大学の登坂宣好先生に、連続体力学のためのテンソル代数・テンソル解析の基礎について、解説をお願いいたしました。なお、チュートリアル記事は1ページ目のみを本誌に掲載し、続きは日本計算工学会HP上で公開していますので、そちらも併せてご参照ください。

テンソル代数・テンソル解析 ー連続体力学の数理的基礎ー

第３講 テンソル代数Ⅱ ーテンソルをどのように表すのかー

登坂 宣好

第３講概要

第2講でテンソルを「線形空間上の線形写像」として位置づけた。なお、この場合のテンソルはいわゆる「2階のテンソル」である。対象とする線形空間として、2種類の線形空間、すなわち線形空間Vとその双対空間V^*が考えられるので、線形空間上の線形写像として4種類の線形写像が定義できることを示した。

線形写像は、線形空間に基底を導入することによって、「表現行列」として表されることを線形代数学で習ってきた。これも線形写像の一つの表現である。しかし、線形写像は線形写像空間$L(V)$の元であるから、この線形空間に基底を導入すればその線形結合として、ユニークに表されなければならない。本講では、このような線形代数学の基本的な考え方に基づき、線形写像それ自体の表現について考える。その際に必要となる概念が、基底ベクトルの「写像積」である。種々の線形写像に対して、基底ベクトルの写像積を用いた表現を与えることにする。

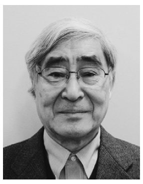
第3講では、各線形写像空間の元としてのテンソルを線形空間に基底を導入することによって得られる様々な具体的な表現について考える。すでに、第1講で主張したように、連続体力学の基本的な量は、変形勾配テンソル（または歪テンソル）と応力テンソルである。この量の性質を捉えるためにはそれに対応するテンソルの表現が必要となる。例えば、応力や歪の主軸問題（主応力・主歪）にはテンソル（線形写像）のスペクトル表現（射影表現）が有効となる。変形勾配の伸縮変形と回転変形の分離に対しては、テンソルの極分解が必要となる。これらの表現は、線形写像の固有値問題を解くことによって得られる固有値と固有ベクトルを用いて写像積で与えられる。特に、連続体力学における変形勾配テンソルの「伸縮変形」と「回転変形」の積として表される極分解に対する写像積表現を示すことにする。

第2講で、線形写像空間$L(V_E, \boldsymbol{R}) \equiv V_E^*$の元である線形関数に対して、スカラー積を用いた表現定理（7.3節式（57））を述べた。本講では、交代（反対称）線形写像空間の元である交代線形写像に対して、ベクトル積を用いた表現定理を述べ、交代線形写像と軸ベクトルの関係についても言及する。

以上、この第3講では、線形写像としてのテンソルを連続体力学における応力や歪とする場合に有効な様々な表現を与える。その各章は次の通りである。

1 はじめに
2 写像積
3 線形写像の表現
4 線形写像のスペクトル表現
5 線形写像の極分解
6 交代線形写像の表現
7 高階テンソル

筆者紹介



とさか のぶよし
1971年東京大学大学院工学系研究科博士課程修了、日本大学生産工学部を経て、現在、東京電機大学未来科学部建築学科客員教授。
弾性シェルの非線形理論、積分方程式・境界要素法による連続体力学の数値解法、フィルター理論による逆問題解析等の研究に従事、現在はEngineering Science（基礎工学）教育に関心を有する。日本計算工学会名誉会員。

1　はじめに

第 1 講で示したように連続体力学では、線形写像をテンソルと捉える立場が有効である。何故ならば、応力や変形勾配から定義される歪等はそのようなテンソル量である。このような量を理解するには、テンソルを理解するのに適合した表現が必要となる。例えば、応力や歪の主軸問題や変形勾配の極分解である。そこで、本講では、線形写像を対象として、その様々な表現を与えることにする。そのためには、線形写像空間の基底を定める必要があり、写像積の概念を導入する。

なお、テンソル場の微分量を定めるためには、写像積の概念を拡張する必要があるので、それについても触れる。

2　写像積

第 2 講 8 節で定義した 4 種類の線形写像に注目する。これらの線形写像を表現するために、線形空間 $V \simeq V^{**}$ とその双対空間 V^* の各元の間に次のような新しい演算を導入する [1]。

定義　写像積

線形空間 $V \cong V^{**}$ とその双対空間 V^* の各元に対して、次のような線形写像を与える演算を各元の写像積 (mapping product) とよび、その演算記号を $\odot$ で表す。

1. $\boldsymbol{a} \odot \eta \in L(V)$ $(\boldsymbol{a} \in V,\ \eta \in V^*)$
$$(\boldsymbol{a} \odot \eta)[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{a}\,(\eta[\boldsymbol{u}]) \tag{1}$$
2. $\phi \odot \Gamma \in L(V^*)$ $(\phi \in V^*,\ \Gamma \in V^{**})$
$$(\phi \odot \Gamma)[\psi] := \phi\,(\Gamma[\psi]) \cong (\phi \odot \boldsymbol{b})[\psi] \quad (\boldsymbol{b} \cong \Gamma) \tag{2}$$
3. $\phi \odot \eta \in L(V, V^*)$ $(\phi,\ \eta \in V^*)$
$$(\phi \odot \eta)[\boldsymbol{u}] := \phi\,(\eta[\boldsymbol{u}]) \tag{3}$$
4. $\boldsymbol{a} \odot \Gamma \in L(V^*, V)$ $(\boldsymbol{a} \in V,\ \Gamma \in V^{**})$
$$(\boldsymbol{a} \odot \Gamma)[\psi] := \boldsymbol{a}\,(\Gamma[\psi]) \cong (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})[\psi] \quad (\boldsymbol{b} \cong \Gamma) \tag{4}$$

この定義から写像積は左側の元と右側の元についてそれぞれ線形であることがわかる。そこで、上記の定義中の 1 番目の写像積を例として、その演算の有する性質をまとめて以下に示しておく。

1. $(p\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \odot \eta = p\,(\boldsymbol{a} \odot \eta) + \boldsymbol{b} \odot \eta$
2. $\boldsymbol{a} \odot (p\eta + \zeta) = p\,(\boldsymbol{a} \odot \eta) + \boldsymbol{a} \odot \zeta$
3. $\boldsymbol{a} \odot \eta = \Theta$（零写像） $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ *or* $\eta = \theta$

なお、写像積との合成写像に関する性質は次の通りとなる。

1. $(\boldsymbol{a} \odot \eta)(\boldsymbol{b} \odot \zeta) = \eta[\boldsymbol{b}](\boldsymbol{a} \odot \zeta)$
2. $T(\boldsymbol{a} \odot \eta) = T[\boldsymbol{a}] \odot \eta$
3. $(\boldsymbol{a} \odot \eta)T = \boldsymbol{a} \odot T^*[\eta]$
4. $\zeta(\boldsymbol{a} \odot \eta) = \zeta[\boldsymbol{a}]\eta$

なお、ここで与えた V 上の写像積は、ユークリッド線形空間 V_E を対象とした場合の写像積として 3.3.2 において改めて定義する。

2.1　線形写像空間の基底

線形空間 V の基底について既に第 2 講で述べた。さらに、ユークリッド線形空間 V_E と 3 次元ユークリッド空間 E^3 では、正規直交基底がとれることも示した。第 2 講 8 節では、線形空間として 4 種類の線形写像空間が構成できることも述べた。そこで、本節では、これらの線形写像空間の基底について考える。

線形空間 V およびその双対空間 V^* の線形写像の集合として構成された 4 種類の線形写像空間の“基底”が前述の写像積の概念を用いることによって構成できるので、その結果を次の定理にまとめておく。

定理　線形写像空間の基底と次元

有限次元線形空間 V $(\dim V = n)$ とその双対空間 V^*, V^{**} において、V の一つの基底を $G = \{\boldsymbol{g}_i\} \cong \Sigma^*(= \{\mathcal{G}_i\})$ とし、その双対基底を $\Sigma = \{\sigma^i\}$ とする場合、4 種類の線形写像空間の基底は写像積を用いて、次のように与えられる。

1. $L(V)$ の基底 : $G \odot \Sigma := \{\boldsymbol{g}_i \odot \sigma^j\}$ (5)
2. $L(V^*)$ の基底 : $\Sigma \odot G := \{\sigma^i \odot \boldsymbol{g}_j\}$ (6)
3. $L(V, V^*)$ の基底 : $\Sigma \odot \Sigma := \{\sigma^i \odot \sigma^j\}$ (7)
4. $L(V^*, V)$ の基底 : $G \odot G := \{\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}_j\}$ (8)

したがって、上記の 4 種類の線形写像空間の次元はすべて n^2 となる。

3　線形写像の表現

線形空間の元は、空間に基底を定めることによってその線形結合として表される。したがって、抽象的な元はその線形結合を通してその成分を持って具体化されることになる。本章では線形写像空間の元に対する具体的な表現を与える。

3.1　線形関数の表現

3.1.1　行列表現

まず始めに線形写像の特別な場合として定義された線形関数の表現を与える。ただし、以下では、V の基

底を $G = \{\ \boldsymbol{g}_i\ \}$、その双対基底を $\Sigma = \{\ \sigma^i\ \}$ とする。
任意の線形関数を ϕ とすると、ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して、

$$\phi[\boldsymbol{u}] = \phi[u^i \boldsymbol{g}_i] = u^i \phi[\boldsymbol{g}_i] = \phi_i u^i \quad (\ \phi_i := \phi[\boldsymbol{g}_i]\ )$$

となる。したがって、線形関数 ϕ は各基底ベクトル $\boldsymbol{g}_i$ の ϕ による n 個の像（実数）ϕ_i の組 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ によって定められる。そこで、この n 個の実数の組を以下のように 1 行 n 列の行列を用いて表し、線形関数 ϕ の "行ベクトル" 表現とよぶ。

$$[\phi] := \begin{pmatrix} \phi[\boldsymbol{g}_1] & \ldots & \phi[\boldsymbol{g}_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \ldots & \phi_n \end{pmatrix}$$

3.1.2　双対基底による表現

線形関数 ϕ は V^* の元であるから、既に第 2 講 7.1 の双対基底の項で示したように双対基底の線形結合として次のように表される。

$$\phi = \phi_i \sigma^i$$

3.2　線形写像の表現

3.2.1　行列表現

上記の 4 つの線形写像の中で線形写像 $T \in L(V)$ について示す。有限次元線形空間の基底を $G = \{\ \boldsymbol{g}_i\ \}$ とする。ベクトル $\boldsymbol{u}$ の T による像を $\boldsymbol{v}$ とすると、

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i = T[u^j \boldsymbol{g}_j] = u^j T[\boldsymbol{g}_j] = T^i{}_j \boldsymbol{g}_i u^j$$

となるので、各ベクトルの基底 G による成分の間には次の関係が成り立たなければならない。

$$v^i = T^i{}_j u^j$$

すなわち、n 個の成分 u^i と v^i は n^2 個の実数 $T^i{}_j$ によって関係付けられる。この n 個の関係式を次のように行列を用いて表す。

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T^1{}_1 & \ldots & T^1{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T^n{}_1 & \ldots & T^n{}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

この場合、n 行 n 列行列 $[T^i{}_j]$ を線形写像 T の基底 G による "表現行列" とよぶ。なお、ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対する上記の表現は基底 G による列ベクトル表現とよばれている。そこで、上式を基底に依存して定まることを強調して次のように表すことにする。

$$(\boldsymbol{v})_G = [T^i{}_j]_G\ (\boldsymbol{u})_G \quad (\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{T}[\boldsymbol{u}]\ )$$

この表現は、あくまでも 2 つのベクトルの成分の間に成立する関係式で線形写像自体の表現を与えているわけではないことを注意しておく。

3.2.2　写像積表現

第 2 講 8 章に示した 4 つの線形写像空間の基底を用いることによって、各線形写像自体は次のように基底による線形結合として表される。

1. $T \in L(V)$:　　$T = T^i{}_j (\boldsymbol{g}_i \odot \sigma^j)$　(9)
   $(\ T[\boldsymbol{g}_j] := T^i{}_j \boldsymbol{g}_i\ )$
2. $\mathcal{T} \in L(V^*)$:　　$\mathcal{T} = \mathcal{T}_i{}^j (\sigma^i \odot \boldsymbol{g}_j)$　(10)
   $(\ \mathcal{T}[\sigma^j] := \mathcal{T}_i{}^j \sigma^i\ )$
3. $\mathcal{A} \in L(V, V^*)$:　　$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ij} (\sigma^i \odot \sigma^j)$　(11)
   $(\ \mathcal{A}[\boldsymbol{g}_j] := \mathcal{A}_{ij} \sigma^i\ )$
4. $A \in L(V^*, V)$:　　$A = A^{ij} (\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}_j)$　(12)
   $(\ A[\sigma^j] := A^{ij} \boldsymbol{g}_i\ )$

3.2.3　V_E 上での写像積表現

既に示したように V_E 上の線形関数さらに双対基底ベクトルの働きは 2 つのベクトルのスカラー積として表されるので、V_E 上の 4 つの線形写像は上記の表現の代わりに以下に示すようになる。

1. $T = T^i{}_j (\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}^j) = T^i{}_j g^{jl} (\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}_l)$　(13)
2. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_i{}^j (\boldsymbol{g}^i \odot \boldsymbol{g}_j) = \mathcal{T}_i{}^j g^{il} (\boldsymbol{g}_l \odot \boldsymbol{g}_j)$　(14)
3. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ij} (\boldsymbol{g}^i \odot \boldsymbol{g}^j) = \mathcal{A}_{ij} g^{il} g^{jm} (\boldsymbol{g}_l \odot \boldsymbol{g}_m)$　(15)
4. $A = A^{ij} (\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}_j)$　(16)

ただし、このでの写像積は基底ベクトルに対して、次のようにスカラー積を用いて定義される。

$$(\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}^j)[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{g}_i (\boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{u}) \qquad (17)$$

なお、この写像積は、文献 [4] 等で "テンソル積" として、$\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j$ と表されているが、本講ではそれと区別する。ここで、V_E の基底として正規直交基底 $S = \{\boldsymbol{e}_i\}$ を選ぶと線形写像は共変・反変の区別なく次のように表される。

$$T = T^{ij} (\boldsymbol{e}_i \odot \boldsymbol{e}_j) \qquad (18)$$

3.3　双対写像の表現

3.3.1　写像積表現

第 2 講 7.2 節の式 (55) で定義した線形写像の双対写像の表現を以下に与えておく。線形写像 T の線形写像空間の基底に関する表現を

$$T = T^i{}_j (\boldsymbol{g}_i \odot \sigma^j)$$

とすると、双対写像の定義から、T^* は次のように表される。

$$T^*[\phi] := \phi T = \phi(T^i{}_j (\boldsymbol{g}_i \odot \sigma^j)) = T^i{}_j \phi(\boldsymbol{g}_i \odot \sigma^j)$$

ここで、線形関数 ϕ と写像積 $(\boldsymbol{g}_i \odot \sigma^j)$ の積に対する性質を適用すると、

$$
\begin{aligned}
T^*[\phi] &= T^i{}_j \phi[\boldsymbol{g}_i]\sigma^j = T^i{}_j \phi_i \sigma^j \\
&= T^i{}_j \sigma^j (\mathcal{G}_i[\phi]) = T^i{}_j (\sigma^j \odot \mathcal{G}_i)[\phi]
\end{aligned}
$$

となるので、同型対応 $V^{**} \cong V$ を考慮して次式のような表現を得る。

$$
T^* = T^i{}_j (\sigma^j \ \odot\ \mathcal{G}_i) \cong T^i{}_j (\sigma^j \ \odot\ \boldsymbol{g}_i) \tag{19}
$$

3.3.2　V_E 上での写像積表現

V_E 上での線形写像の表現は既に示した線形関数のスカラー積表現を用いると、$T = T^i_j(\boldsymbol{g}_i \ \odot\ \boldsymbol{g}^j)$ となるので、その双対写像 T^* は、$T^*[\phi]$ に対して次のようなベクトルのスカラー積表現となる。

$$
(T^*[\phi])[\boldsymbol{u}] = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}) \qquad (\forall\ \boldsymbol{u} \in V_E)
$$

一方、双対写像の定義から、あるベクトル $\boldsymbol{v} \in V_E$ が存在し、

$$
(\phi T)[\boldsymbol{u}] = \phi[T[\boldsymbol{u}]] = (\boldsymbol{v} \cdot T[\boldsymbol{u}]) = (T^a[\boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{u})
$$

となるので、次式が成り立つことになる。

$$
T^a[\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{w}
$$

ここで、同型対応を考慮すると、

$$
T^a[\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{w} \cong T^*[\phi] \cong T^*[\boldsymbol{v}]
$$

となるので、$T^* = T^a$ となる。すなわち、T の双対写像 T^* は V_E 上では T の随伴 T^a と等しくなり、上記の T の表現に対して、次のように表される。

$$
T^* \equiv T^a = T^i{}_j (\boldsymbol{g}^j \ \odot\ \boldsymbol{g}_i) \tag{20}
$$

3.4　線形写像のトレース

線形写像が与えられた場合、それに対し一つの実数を与えるような働き、すなわち線形写像をそれに対応する一つの実数に写すような写像を「トレース」(trace) とよび、T_r と表す。既に示したように、線形写像は 4 種類存在するので各線形写像に対して、トレース演算を次のように定義する。

定義　　線形写像のトレース

各線形写像に対するトレース演算を次のような線形写像空間上の線形関数として定義する。

$$
\begin{aligned}
&T_r : L(V) \to \boldsymbol{R},\ T \in L(V) \to T_r[T]\ \in \boldsymbol{R} \\
&T_r : L(V^*) \to \boldsymbol{R},\ \mathcal{T} \in L(V^*) \to T_r[\mathcal{T}] \in \boldsymbol{R} \\
&T_r : L(V, V^*) \to \boldsymbol{R},\ \mathcal{A} \in L(V, V^*) \to T_r[\mathcal{A}] \in \boldsymbol{R} \\
&T_r : L(V^*, V) \to \boldsymbol{R},\ A \in L(V^*, V) \to T_r[A] \in \boldsymbol{R}
\end{aligned}
$$

ここで、各線形写像が具体的に基底表現されている場合には、 上記のトレース演算を次のように成分を用いて具体化できる。

1.　$T = T^i{}_j(\boldsymbol{g}_i \ \odot\ \sigma^j)$;

$$
\begin{aligned}
T_r[T] : &= \sigma^m[T[\boldsymbol{g}_m]] = \sigma^m[T^i{}_j(\boldsymbol{g}_i \ \odot\ \sigma^j)[\boldsymbol{g}_m]] \\
&= T^m{}_m
\end{aligned} \tag{21}
$$

2.　$\mathcal{T} = \mathcal{T}_j{}^i(\sigma^j \ \odot\ \mathcal{G}_i) \cong \mathcal{T}_j{}^i(\sigma^j \ \odot\ \boldsymbol{g}_i)$;

$$
\begin{aligned}
T_r[\mathcal{T}] : &= \mathcal{G}_m[\mathcal{T}[\sigma^m]] = \mathcal{G}_m[\mathcal{T}_j{}^i(\sigma^j \ \odot\ \mathcal{G}_i)[\sigma^m]] \\
&\cong \boldsymbol{g}_m[\mathcal{T}[\sigma^m]] = \boldsymbol{g}_m[\mathcal{T}_j{}^i(\sigma^j \delta^m_i)] \\
&= \mathcal{T}_m{}^m
\end{aligned} \tag{22}
$$

3.　$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ij}(\sigma^j \ \odot\ \sigma^i)$;

$$
\begin{aligned}
T_r[\mathcal{A}] : &= \mathcal{G}_m[\mathcal{A}[\mathcal{G}_m]] = \mathcal{G}_m[\mathcal{A}_{ij}(\sigma^j \ \odot\ \sigma^i)[\mathcal{G}_m]] \\
&\cong \boldsymbol{g}_m[\mathcal{A}[\boldsymbol{g}_m]] = \boldsymbol{g}_m[\mathcal{A}_{ij}\sigma^j(\sigma^i[\boldsymbol{g}_m])] \\
&= \mathcal{A}_{mm}
\end{aligned} \tag{23}
$$

4.　$A = A^{ij}(\boldsymbol{g}_j \ \odot\ \mathcal{G}_i)$;

$$
\begin{aligned}
T_r[A] : &= \sigma^m[A[\sigma^m]] = \sigma^m[A^{ij}\boldsymbol{g}_j \ \odot\ \mathcal{G}_i)[\sigma^m]] \\
&= A^{mm}
\end{aligned} \tag{24}
$$

さらに、線形写像の双対写像のトレースに関しても次のように表される。

$$
\begin{aligned}
T_r[T^*] : &= \mathcal{G}_m[T^*[\sigma^m]] = \mathcal{G}_m[T^i{}_j(\sigma^j \ \odot\ \mathcal{G}_i)[\sigma^m]] \\
&\cong \boldsymbol{g}_m[T^*[\sigma^m]] = \boldsymbol{g}_m[T^i{}_j\sigma^j(\boldsymbol{g}_i[\sigma^m])] \\
&= T^m{}_m = T_r[T]
\end{aligned} \tag{25}
$$

すなわち、双対写像のトレースは、もとの線形写像のトレースと等しいことがわかる。なお、このような性質は、V_E 上では、$T_r[T^a] = T_r[T]$、すなわち、随伴写像のトレースはもとの線形写像のトレースに等しい。

トレース演算の性質について線形空間 V 上の線形写像を対象として以下に示す。

1. $T_r[T + S] = T_r[T] + T_r[S]$
2. $T_r[pT] = p(T_r[T])$
3. $T_r[TS] = T_r[ST] = T^l{}_m S^m{}_l = S^m{}_l T^l{}_m$

次に、$L(V_E)$ 上の線形写像 $T = T^i{}_j(\boldsymbol{g}_i \ \odot\ \boldsymbol{g}^j)$ のトレースをスカラー積を用いることによって、

$$
T_r[T] := (\boldsymbol{g}^m \ \cdot\ T[\boldsymbol{g}_m]) = T^m{}_m \tag{26}
$$

となる。すると、2 つのベクトルによる写像積としてのテンソルに対しては、そのトレースは次のように 2 つのベクトルのスカラー積となる。

$$
T_r[\boldsymbol{u} \ \odot\ \boldsymbol{v}] = (\boldsymbol{u} \ \cdot\ \boldsymbol{v}) \tag{27}
$$

3.5　線形写像のスカラー積

線形写像に対するトレースの定義から「トレース」は１つの線形写像に対し実数を定めるような線形写像である。したがって、「トレース」は、“線形写像空間 $L(V)$ 上の線形関数”となる。既に第２講 7.3 節で示した線形関数のスカラー積による表現定理に対応して、「トレース」は２つの線形写像の間に「スカラー積」を導入すれば、そのスカラー積を用いて表現されることになる。そこで、線形写像空間に次のようなスカラー積を定義する。

定義　線形写像のスカラー積

２つの線形写像を A, B とすると、そのスカラー積をトレースを用いて次のよう定義する。

$$(A \cdot B) := T_r[A^a B] = T_r[B^a A] = (B \cdot A) \quad (28)$$

線形写像のスカラー積に対して次のような性質を有することがわかる。

1. $(I \ \cdot \ A) = T_r[A]$
2. $(A \ \cdot \ BC) = (B^a A \ \cdot \ C)$
3. $((\boldsymbol{a} \ \odot \ \boldsymbol{b}) \ \cdot \ (\boldsymbol{u} \ \odot \ \boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{a} \ \cdot \ \boldsymbol{u})(\boldsymbol{b} \ \cdot \ \boldsymbol{v})$
4. $(\boldsymbol{u} \ \cdot \ T[\boldsymbol{v}]) = (T^a[\boldsymbol{u}] \ \cdot \ \boldsymbol{v}) = (T \ \cdot \ (\boldsymbol{u} \ \odot \ \boldsymbol{v}))$

4　線形写像のスペクトル表現

4.1　線形写像の固有値問題

定義　固有値、固有ベクトル、固有空間

有限次元の線形空間を V とし、その上で定義された線形写像を T とする。次式を満たす λ とベクトル u について下記のように定義する。

$$T[\boldsymbol{u}] = \lambda \boldsymbol{u} \qquad (\ \boldsymbol{u}(\neq \boldsymbol{0}) \ \in V \ ) \qquad (29)$$

ただし、

$\lambda \ \in \boldsymbol{R}$:　T の固有値 (eigenvalue)

$\boldsymbol{u} \ \in V$:　λ の固有ベクトル (eigenvector)

$E_\lambda(T) := \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{u} \mid T[\boldsymbol{u}] = \lambda \boldsymbol{u}\}$:

T の λ に関する固有空間 (eigenspace)

$\nu(T) := \dim(\ker(T - \lambda I))$:

T の固有値 λ の重複度 (multiplicity)

$S_p(T) := \{\lambda \ \mid \det(\boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0\}$:

T の点スペクトル (point spectrum)

$\det(\boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$:

表現行列 $\boldsymbol{T}$ の固有方程式 (eigen equation)

線形写像の固有値と固有ベクトルに関して次のような性質を有する。ただし、線形写像 T の固有値を重根も含めて $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする。

1. $\det \boldsymbol{T} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$
2. $T_r[T] = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$
3. T の随伴写像 T^a の固有値は T の固有値と一致する。
4. T の表現行列を変えても固有方程式は一致する。すなわち、固有方程式は線形写像 T に“固有”となる。
5. ２つの線形写像に対して、各線形写像の不変量が同一ならば、同じ固有値を有する。
6. T の相異なる固有値に対する固有ベクトルの組は線形独立である。
7. 対称線形写像の固有値は全て実数である。その相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する。

4.2　線形写像のスペクトル分解定理

線形写像のスペクトル分解を３次元線形空間 V^3 上の線形写像 T を対象として以下に示す。

定理　線形写像のスペクトル分解

３次元線形空間 V^3 上の線形写像を T とする。その固有値が全て実数として、λ, μ, ν で与えられている場合、T は、固有値の状態に応じて次のように表現される。

1. $T = \lambda(\boldsymbol{g}_1 \ \odot \ \sigma^1) + \mu(\boldsymbol{g}_2 \ \odot \ \sigma^2) + \nu(\boldsymbol{g}_3 \ \odot \ \sigma^3)$
$$(\lambda > \mu > \nu) \qquad (30)$$
2. $T = \lambda(I - \boldsymbol{g}_3 \ \odot \ \sigma^3) + \nu(\boldsymbol{g}_3 \ \odot \ \sigma^3)$
$$(\lambda = \mu > \nu) \qquad (31)$$
3. $T = \lambda I \ = \lambda(\boldsymbol{g}_1 \ \odot \ \sigma^1 + \boldsymbol{g}_2 \ \odot \ \sigma^2 + \boldsymbol{g}_3 \ \odot \ \sigma^3)$
$$(\lambda = \mu = \nu) \qquad (32)$$

ただし、ベクトル $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ は T の各固有値に対する固有空間 $E_\lambda(T), E_\mu(T), E_\nu(T)$ の基底ベクトルとし、これらから構成される $G = \{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ を V^3 の基底とする。さらに、$\Sigma = \{\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}$ を G の双対基底とする。

なお、上記の線形写像のスペクトル分解は、次のような V^3 の T の固有空間による直和分解

$$V^3 = E_\lambda(T) \dot{+} E_\mu(T) \dot{+} E_\nu(T)$$
$$(\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\lambda + \boldsymbol{u}_\mu + \boldsymbol{u}_\nu\ )$$

に対する射影 (projection)P_1, P_2, P_3 とよばれる以下の線形写像

$$
\begin{aligned}
& P_1 : V^3 \longrightarrow E_\lambda\ ; \\
& \qquad P_1[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{u}_\lambda = u^1 \boldsymbol{g}_1 = (\boldsymbol{g}_1 \odot \sigma^1)[\boldsymbol{u}] \\
& P_2 : V^3 \longrightarrow E_\mu\ ; \\
& \qquad P_2[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{u}_\mu = u^2 \boldsymbol{g}_2 = (\boldsymbol{g}_2 \odot \sigma^2)[\boldsymbol{u}] \\
& P_3 : V^3 \longrightarrow E_\nu\ ; \\
& \qquad P_3[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{u}_\nu = u^3 \boldsymbol{g}_3 = (\boldsymbol{g}_3 \odot \sigma^3)[\boldsymbol{u}]
\end{aligned}
$$

を導入すると、スペクトル分解 (30 ∼ 32) に対応する射影分解とよばれている次の表現を得る [2]。

$$T = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 \tag{33}$$

$$T = \lambda (I - P_3) + \mu P_3 \tag{34}$$

$$T = \lambda I = \lambda (P_1 + P_2 + P_3) \tag{35}$$

このように T が射影の組によって表される場合、線形写像 T を半単純 (semi-simple) という。なお、上記の射影について次の性質を有することがわかる。

$$
\begin{aligned}
& P_1 P_1 \equiv P_1^2 = (\boldsymbol{g}_1 \odot \sigma^1)(\boldsymbol{g}_1 \odot \sigma^1) \\
& \qquad = \sigma^1[\boldsymbol{g}_1](\boldsymbol{g}_1 \odot \sigma^1) = \boldsymbol{g}_1 \odot \sigma^1 = P_1 \\
& P_2 P_2 \equiv P_2^2 = P_2, \qquad P_3 P_3 \equiv P_3^2 = P_3 \\
& P_1 P_2 = (\boldsymbol{g}_1 \odot \sigma^1)(\boldsymbol{g}_2 \odot \sigma^2) \\
& \qquad = \sigma^1[\boldsymbol{g}_2](\boldsymbol{g}_1 \odot \sigma^2) = 0(\boldsymbol{g}_1 \odot \sigma^2) = O \\
& P_2 P_1 = (\boldsymbol{g}_2 \odot \sigma^2)(\boldsymbol{g}_1 \odot \sigma^1) \\
& \qquad = \sigma^2[\boldsymbol{g}_1](\boldsymbol{g}_2 \odot \sigma^1) = 0(\boldsymbol{g}_2 \odot \sigma^1) = O \\
& P_1 P_3 = P_3 P_1 = P_2 P_3 = P_3 P_2 = O
\end{aligned}
$$

線形写像が対称である場合には、既に述べたようにその固有値は全て実数となり、異なる固有値に対する固有ベクトルはお互いに直交するので V_E^3 上の線形写像 T に対して次のようなスペクトル分解となる。

1. $T = \lambda(\boldsymbol{e}_1 \odot \boldsymbol{e}_1) + \mu(\boldsymbol{e}_2 \odot \boldsymbol{e}_2) + \nu(\boldsymbol{e}_3 \odot \boldsymbol{e}_3)$
   $$= \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 \quad (\lambda > \mu > \nu) \tag{36}$$
2. $T = \lambda(I - \boldsymbol{e}_3 \odot \boldsymbol{e}_3) + \nu(\boldsymbol{e}_3 \odot \boldsymbol{e}_3)$
   $$= \lambda(I - P_3) + \nu P_3 \quad (\lambda = \mu > \nu) \tag{37}$$
3. $T = \lambda(\boldsymbol{e}_1 \odot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \odot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \odot \boldsymbol{e}_3)$
   $$= \lambda(P_1 + P_2 + P_3)$$
   $$= \lambda I \quad (\lambda = \mu = \nu) \tag{38}$$

ただし、ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は T の実固有値に対する固有空間 $E_\lambda(T), E_\mu(T), E_\nu(T)$ の単位基底ベクトルとし、これらのベクトルから構成される $S = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を V_E^3 の正規直交基底とする。さらに、各 P_1, P_2, P_3 は V_E^3 の T の固有空間による直交直和分解

$$V_E^3 = E_\lambda(T) \ \oplus\ E_\mu(T) \ \oplus\ E_\nu(T)$$

に対する正射影 (orthogonal projection) とする。この結果、対称線形写像は「半単純」である。

以上の定理より、線形写像の各写像積表現によるスペクトル分解から考えると、そのスペクトル分解は、いわゆる線形写像の表現行列の「対角化」を与えることを意味している。つまり、線形写像の写像積表現において採用した線形空間の基底を、各固有空間の基底ベクトルをもとにして構成するならば、その表現行列が対角化されることとなる。

5　線形写像の極分解

5.1　極分解

線形写像の表現のなかでもその極分解表現は下記の意味において連続体力学で重要な役割を果たす。そこでまず始めに「極分解」の意味を与えておく。

複素数はその大きさと軸からの偏角を用いて極表示されることを思い出すと、複素数同士の積は長さと角度の変化という幾何学的作用のもとに計算できる。すなわち、複素数を他の複素数に変換するには、２つの幾何学的作用によって表されることになる。

一方、連続体力学では、物体の２点を結ぶ微小線素ベクトルの変形による変化を考えると、変形前後におけるその線素ベクトルの変化は、その長さと角度の変化、すなわち伸縮的変形と回転的変形の積として表される。

以上のことをベクトルの線形写像として捉えた場合、この写像が２つの線形写像の積として表されることになる。このようなことが線形写像に対して成立することを述べたのが以下に示す線形写像の極分解定理である。

5.2　線形写像の平方根

線形写像の極分解定理を証明する際に必要となる線形写像の平方根を定義する。

定義　　線形写像の平方根

線形空間 V 上のある線形写像 T に対して、次式を満たすような線形写像 A を T の平方根 (square root) とよぶ。

$$A^2 = T \tag{39}$$

実数の場合にはひとつの実数に対して２つの平方根が存在するが、線形写像の場合には、多数の平方根が存在することになる。しかし、線形写像が対称性を有する場合には、以下の定理が成り立つ。

定理　非負対称線形写像の平方根

ユークリッド線形空間 V_E 上の対称線形写像を T とする。その T が非負（または、正定値）の場合には、ユニークな対称かつ非負（または、正定値）の平方根 A を有する。そこで、その平方根を $A=\sqrt{T}$ と表す。

ここで、V_E^3 上の対称線形写像 T を考える。T の相異なる3つの固有値を λ,μ,ν とすると、T が非負の場合にはこのすべての固有値は非負の実数となる。既に示した T の正規直交基底による写像積表現のスペクトル分解を用いると、次のように表される。

$$T=\lambda(\boldsymbol{e}_1\odot\boldsymbol{e}_1)+\mu(\boldsymbol{e}_2\odot\boldsymbol{e}_2)+\nu(\boldsymbol{e}_3\odot\boldsymbol{e}_3)$$

T の平方根 A は、その定義から

$$\begin{aligned}A=&\pm\sqrt{\lambda}(\boldsymbol{e}_1\odot\boldsymbol{e}_1)\pm\sqrt{\mu}(\boldsymbol{e}_2\odot\boldsymbol{e}_2)\\&\pm\sqrt{\nu}(\boldsymbol{e}_3\odot\boldsymbol{e}_3)\end{aligned}$$

として表される。すなわち、

$$\begin{aligned}A^+:=&\sqrt{\lambda}(\boldsymbol{e}_1\odot\boldsymbol{e}_1)+\sqrt{\mu}(\boldsymbol{e}_2\odot\boldsymbol{e}_2)\\&+\sqrt{\nu}(\boldsymbol{e}_3\odot\boldsymbol{e}_3)\\A^-:=&-\sqrt{\lambda}(\boldsymbol{e}_1\odot\boldsymbol{e}_1)-\sqrt{\mu}(\boldsymbol{e}_2\odot\boldsymbol{e}_2)\\&-\sqrt{\nu}(\boldsymbol{e}_3\odot\boldsymbol{e}_3)\end{aligned}$$

とすると、A^+ が非負写像となるので、T の平方根は次のように与えられる。

$$\sqrt{T}=A^+ \tag{40}$$

5.3　線形写像の極分解定理

V_E 上の各線形写像に対応して、次のような極分解が与えられる。

定理　線形写像の極分解

１．ユークリッド線形空間 V_E 上の線形写像を T とすると、次のように２つの線形写像の積として極分解される [3]。

$$T=RU,\qquad T=VQ \tag{41}$$

ただし　$U,V:V_E$ 上の非負対称線形写像 (non-negative symmetric linear mapping) $R,Q:V_E$ 上の直交写像（等長写像）(orthogonal linear mapping)

２．可逆な線形写像である場合には、次のような極分解となり、各分解はユニークとなる [4]。

$$T=RU=VR \tag{42}$$

ただし、$U,V:V_E$ 上の非負対称線形写像 $R:V_E$ 上の直交写像

なお、連続体力学における変形勾配テンソルは多くの場合、可逆かつ正値な行列式の値を有するので、上記の極分解は $T\in L(V_E)^+$ に対して、次のように与えられる。

$$T=RU=VR$$

ただし、$U,V:V_E$ 上の正定値対称線形写像 (positive definite symmetric linear mapping) $R:V_E$ 上の回転写像 (rotation) ($R^{-1}=R^a,\det R=1$)

5.4　線形写像の極分解の写像積表現

連続体力学の変形勾配のテンソルを対象とした場合の極分解を具体的に表現してみよう。対象とする線形写像を $T\in L(V_E^3)$ とする。T の随伴写像を T^a とすると、次のような正定値対称線形写像 $C,B\in L_{psym}(V_E^3)$ が定義できる。

$$C:=T^aT$$
$$(C^a=(T^aT)^a=T^a(T^a)^a=T^aT=C)$$
$$(\boldsymbol{b}\cdot C[\boldsymbol{b}])=(\boldsymbol{b}\cdot T^aT[\boldsymbol{b}])=(T[\boldsymbol{b}]\cdot T[\boldsymbol{b}])>0$$
$$B:=TT^a$$
$$(B^a=(TT^a)^a=(T^a)^aT^a=TT^a=B)$$
$$(\boldsymbol{f}\cdot B[\boldsymbol{f}])=(\boldsymbol{f}\cdot TT^a[\boldsymbol{f}])=(T^a[\boldsymbol{f}]\cdot T^a[\boldsymbol{f}])>0$$

このような線形写像では、３つの実固有値が正値となる。さらに、C,B の第１、２，３不変量が等しいので特性方程式は一致する。そこで、この固有値を $\lambda>\mu>\nu>0$ とすると「対称線形写像のスペクトル分解定理」より C,B は次のように表現できる。

$$C=\lambda(\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{u})+\mu(\boldsymbol{v}\odot\boldsymbol{v})+\nu(\boldsymbol{w}\odot\boldsymbol{w}) \tag{43}$$
$$B=\lambda(\boldsymbol{r}\odot\boldsymbol{r})+\mu(\boldsymbol{s}\odot\boldsymbol{s})+\nu(\boldsymbol{t}\odot\boldsymbol{t}) \tag{44}$$

ただし、ベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ およびベクトル $\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ は、C および B の各固有値に対する単位の固有ベクトルとする。この表現から、5.2 節で示した「平方根定理」より正定値対称線形写像 $U,V\in L_{psym}(V_E^3)$ が定義でき、そのスペクトル分解が次のように与えられる。

$$\begin{aligned}U:=&\sqrt{C}\\=&\sqrt{\lambda}(\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{u})+\sqrt{\mu}(\boldsymbol{v}\odot\boldsymbol{v})+\sqrt{\nu}(\boldsymbol{w}\odot\boldsymbol{w})\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}V:=&\sqrt{B}\\=&\sqrt{\lambda}(\boldsymbol{r}\odot\boldsymbol{r})+\sqrt{\mu}(\boldsymbol{s}\odot\boldsymbol{s})+\sqrt{\nu}(\boldsymbol{t}\odot\boldsymbol{t})\end{aligned} \tag{46}$$

次に、C と B の各固有ベクトルから成る正規直交基底 $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\},\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}\}$ を関係付けるような線形写像 R を次のように導入する。

$$\boldsymbol{r}=R[\boldsymbol{u}],\quad \boldsymbol{s}=R[\boldsymbol{v}],\quad \boldsymbol{t}=R[\boldsymbol{w}]$$

この線形写像 R は上記の定義から、$R^a R = I = R^{-1} R$ となり、$R^a = R^{-1}$ から $R \in L_{orth}(V_E^3)$ である。したがって、$\det \boldsymbol{R} = \pm 1$ となる。さらに、スカラー３重積 $[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{s}\ \boldsymbol{t}] = 1$ とすると、$\det \boldsymbol{R} = 1$ でなければならないので、$R \in L_{orth}^{+}(V_E^3)$ となることがわかる。そこで、この線形写像すなわち、回転写像 R の写像積表現を求めると次のように与えられる。

$$\begin{aligned} R = RI &= R(\boldsymbol{u} \odot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \odot \boldsymbol{w}) \\ &= (R[\boldsymbol{u}] \odot \boldsymbol{u}) + (R[\boldsymbol{v}] \odot \boldsymbol{v}) + (R[\boldsymbol{w}] \odot \boldsymbol{w}) \\ &= \boldsymbol{r} \odot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{s} \odot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{t} \odot \boldsymbol{w} \end{aligned} \tag{47}$$

以上の結果を用いて極分解を求めると、

$$\begin{aligned} RU &= \sqrt{\lambda}(\boldsymbol{r} \odot \boldsymbol{u}) + \sqrt{\mu}(\boldsymbol{s} \odot \boldsymbol{v}) + \sqrt{\nu}(\boldsymbol{t} \odot \boldsymbol{w}) \\ VR &= \sqrt{\lambda}(\boldsymbol{r} \odot \boldsymbol{u}) + \sqrt{\mu}(\boldsymbol{s} \odot \boldsymbol{v}) + \sqrt{\nu}(\boldsymbol{t} \odot \boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

となり、２つの極分解が一致するので、線形写像 $T \in L^{+}(V_E^3)$ の写像積表現として次式を得る。

$$T = \sqrt{\lambda}(\boldsymbol{r} \odot \boldsymbol{u}) + \sqrt{\mu}(\boldsymbol{s} \odot \boldsymbol{v}) + \sqrt{\nu}(\boldsymbol{t} \odot \boldsymbol{w}) \tag{48}$$

以上より、可逆線形写像 T の極分解に対する写像積表現は、T から定義される２つの正定値対称線形写像 C, B の固有値問題を解くことによって得られる固有値とその固有ベクトルを定めることによって、上記のような $U, V \in L_{psym}(V_E^3)$ および $R \in L_{orth}^{+}(V_E^3)$ から与えられる。

6　交代線形写像の表現

6.1　交代線形写像の表現定理

３次元ユークリッド線形空間 V_E^3 上の交代（反対称）線形写像を考える。この写像に対して「軸ベクトル」とよばれる１つのベクトルが対応することを示す。すなわち、１つの交代線形写像のベクトルに対する働きは、その軸ベクトル とのベクトル積として具体化される。これは、既述（第２講 7.3 節）の線形関数のスカラー積表現に対応し、以下のような交形線形写像のベクトル積表現となる [5]。

定理　　交代線形写像の表現定理

３次元ユークリッド線形空間 V_E^3 の向きを右手系と定める。そのような向き付け線形空間上の交代線形写像を $W : V_E^3 \to V_E^3,\quad W^a = -W$ とすると、

$$\exists\ \boldsymbol{v} \in V_E^3;\ \ W[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} \quad (\forall \boldsymbol{u} \in V_E^3) \tag{49}$$

となる。そこで、交代線形写像 W に対して上式からユニークに定まるベクトル $\boldsymbol{v}$ を W に対応する軸ベクトル (axial vector) とよぶ。

6.2　交代線形写像の行列表現

前定理で交代線形写像に対してその働きは、ベクトル積として表現されることを示した。そこで、その表現をもとに交代線形写像の表現行列を与えることにしよう。

３次元ユークリッド線形空間 V_E^3 に右手系の基底 $G = \{\boldsymbol{g}_i\}$ を採用すると、３つのベクトルはその線形結合として、

$$\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{g}_i, \quad \boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i, \quad \boldsymbol{w} = w^i \boldsymbol{g}_i$$

と表される。表現定理とベクトル積の定義を用いると、

$$\begin{aligned} W[\boldsymbol{u}] &= W[u^j \boldsymbol{g}_i] = u^j W[\boldsymbol{g}_j] = u^j W^i{}_j \boldsymbol{g}_i \\ &= \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = \varepsilon_{ijk} v^i u^j \boldsymbol{g}^k = \varepsilon_{ljk} v^l u^j g^{ki} \boldsymbol{g}_i \\ &= \boldsymbol{w} = w^i \boldsymbol{g}_i \end{aligned}$$

から次のような関係を得る。

$$\begin{aligned} w^i &= W^i{}_j u^j = \varepsilon_{ljk} g^{ki} v^l u^j, \\ W^i{}_j &= \varepsilon_{ljk} g^{ki} v^l, \quad v^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} g_{kl} W^l{}_j \end{aligned} \tag{50}$$

ここで、基底 G に対するベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ の列ベクトル表現を与えると、上記の式は、次のように行列表現される。

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} W^1{}_1 & W^1{}_2 & W^1{}_3 \\ W^2{}_1 & W^2{}_2 & W^2{}_3 \\ W^3{}_1 & W^3{}_2 & W^3{}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g^{1l} \varepsilon_{k1l} v^k & g^{1l} \varepsilon_{k2l} v^k & g^{1l} \varepsilon_{k3l} v^k \\ g^{2l} \varepsilon_{k1l} v^k & g^{2l} \varepsilon_{k2l} v^k & g^{2l} \varepsilon_{k3l} v^k \\ g^{3l} \varepsilon_{k1l} v^k & g^{3l} \varepsilon_{k2l} v^k & g^{sl} \varepsilon_{k3l} v^k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

なお、この行列表現を基底 G の代わりに右手系正規直交基底 $S^{+} = \{\boldsymbol{e}_i\}$ を採用して表現し直すと次のようになり、交代線形写像の働きが簡明に表されることになる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}^1 \\ \tilde{w}^2 \\ \tilde{w}^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{v}^3 & \tilde{v}^2 \\ \tilde{v}^3 & 0 & -\tilde{v}^1 \\ -\tilde{v}^2 & \tilde{v}^1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \\ \tilde{u}^3 \end{pmatrix} \tag{51}$$

ただし、各ベクトルは基底 S^{+} に関して $\boldsymbol{u} = \tilde{u}^i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v} = \tilde{v}^i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{w} = \tilde{w}^i \boldsymbol{e}_i$ と表されている。この表現より、交代線形写像 W の基底 S^{+} に関する表現行列は、ベクトル $\boldsymbol{v}$ の基底 S^{+} に関する３つの成分 $\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{v}^3$ によって表されることが分かる。すなわち、交代線形写像 W はベクトル $\boldsymbol{v}$ に対応し、このベクトルが W の軸ベクトルとなる。

6.3　交代線形写像の写像積

次に、交代線形写像の写像積表現を考える。6.2 で与えた基底 G を採用すると、

$$\begin{aligned} W[\boldsymbol{u}] &= u^j W[\boldsymbol{g}_j] = W^i{}_j \boldsymbol{g}_i\, u^j = W^i{}_j \boldsymbol{g}_i (\boldsymbol{g}^j \cdot\ \boldsymbol{u}) \\ &= W^i{}_j (\boldsymbol{g}_i\ \odot\ \boldsymbol{g}^j)[\boldsymbol{u}] \end{aligned}$$

から、交代線形写像 W は次のように写像積表現される。

$$W = W^i{}_j (\boldsymbol{g}_i\ \odot\ \boldsymbol{g}^j) = W^i{}_j g_{ki} (\boldsymbol{g}^k\ \odot\ \boldsymbol{g}^j) \qquad (52)$$

ここで、前節で示したベクトル表現の結果を用いると、

$$\begin{aligned} W &= g_{kj}(\varepsilon_{lim} v^l g^{mj})(\boldsymbol{g}^k\ \odot\ \boldsymbol{g}^i) \\ &= \varepsilon_{lik} v^l (\boldsymbol{g}^k\ \odot\ \boldsymbol{g}^i) \\ &= v^1(\boldsymbol{g}^3\ \odot\ \boldsymbol{g}^2 - \boldsymbol{g}^2\ \odot\ \boldsymbol{g}^3) \\ &\quad + v^2(\boldsymbol{g}^1\ \odot\ \boldsymbol{g}^3 - \boldsymbol{g}^3\ \odot\ \boldsymbol{g}^1) \\ &\quad + v^3(\boldsymbol{g}^2\ \odot\ \boldsymbol{g}^1 - \boldsymbol{g}^1\ \odot\ \boldsymbol{g}^2) \end{aligned}$$

となる。なお、ここで写像 W の交代性 ($W^a = -W$) を考慮すると W の各成分は次のような交代条件を満たさなければならない。

$$g_{ij} W^j{}_k + g_{kj} W^j{}_i = 0 \quad (W_{ik} + W_{ki} = 0) \qquad (53)$$

この交代条件を考慮して交代線形写像 W の基底 $G^{-1} \odot G^{-1}$ に関する表現行列を与えると次のようになる。

$$\begin{aligned} [W] &= \begin{bmatrix} g_{1j}W^j{}_1 & g_{1j}W^j{}_2 & g_{1j}W^j{}_3 \\ g_{2j}W^j{}_1 & g_{2j}W^j{}_2 & g_{2j}W^j{}_3 \\ g_{3j}W^j{}_1 & g_{3j}W^j{}_2 & g_{3j}W^j{}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & g_{1j}W^j{}_2 & g_{1j}W^j{}_3 \\ -g_{1j}W^j{}_2 & 0 & g_{2j}W^j{}_3 \\ -g_{1j}W^j{}_3 & -g_{2j}W^j{}_3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -v^3 & v^2 \\ v^3 & 0 & -v^1 \\ -v^2 & v^1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

すなわち、W に対するこの行列表現は、軸ベクトル $\boldsymbol{v}$ の基底 G に関する３つの成分 v^1, v^2, v^3 で表されることになり、既に式 (51) で示した表現行列に対応していることが分かる。

7　高階テンソル

これまで２階混合テンソルとしての線形写像の表現について述べてきた。第４講では、スカラー・ベクトル・テンソル場の微分積分を考える。その際、テンソル場の微分量は高階テンソル場になる。したがって、３階テンソル以上の高階テンソルの知識が必要となる。そこで、本章では、一例として、３階テンソルについて述べておく。

３階テンソルとして、次の線形写像 $\mathcal{L} : V_E \to L(V_E)$ に限定して考える。この写像の表現は、V_E の基底 $G = \{\boldsymbol{g}_i\}$ と $L(V_E)$ の基底 $\{\boldsymbol{g}_i \odot \boldsymbol{g}^j\}$ を用いることによって、次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u] &= \mathcal{L}[u^j \boldsymbol{g}_j] = u^j \mathcal{L}[\boldsymbol{g}_j] \\ &= \mathcal{L}^k{}_{mj} (\boldsymbol{g}_k \odot \boldsymbol{g}^m) u^j \\ &= \mathcal{L}^k{}_{mj} (\boldsymbol{g}_k \odot \boldsymbol{g}^m)(\boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{u}) \\ &(\ \mathcal{L}[\boldsymbol{g}_j] := \mathcal{L}^k{}_{mj} (\boldsymbol{g}_k \odot \boldsymbol{g}^m)\ ) \end{aligned}$$

上記の表現において、写像積 $(\boldsymbol{g}_k \odot \boldsymbol{g}^m)$ と基底ベクトル $\boldsymbol{g}^j$ との“新しい写像積”を次のように定義する。

$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{g}_k \odot \boldsymbol{g}^m) \odot \boldsymbol{g}^j)[\boldsymbol{u}] &:= (\boldsymbol{g}_k \odot \boldsymbol{g}^m)(\boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{u}) \\ &= \boldsymbol{g}_k \odot ((\boldsymbol{g}^m \odot \boldsymbol{g}^j)[\boldsymbol{u}]) \qquad (54) \end{aligned}$$

さらに上式より基底ベクトル $\boldsymbol{g}_k$ と写像積 $(\boldsymbol{g}^m \odot \boldsymbol{g}^j)$ との新しい写像積を次のように定義すると、

$$(\boldsymbol{g}_k \odot (\boldsymbol{g}^m \odot \boldsymbol{g}^j))[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{g}_k \odot ((\boldsymbol{g}^m \odot \boldsymbol{g}^j)[\boldsymbol{u}]) \qquad (55)$$

となるので任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して、次のような新しい写像積に関する「結合則」を得る。

$$(\boldsymbol{g}_k \odot \boldsymbol{g}^m) \odot \boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{g}_k \odot (\boldsymbol{g}^m \odot \boldsymbol{g}^j) \equiv \boldsymbol{g}_k \odot \boldsymbol{g}^m \odot \boldsymbol{g}^j \quad (56)$$

以上の結果、線形写像 $\mathcal{L} \in L(V_E, L(V_E))$ は次のように３つの基底ベクトルの新しい写像積を用いて表され、３階混合テンソルとして位置づけられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}^k{}_{mj} ((\boldsymbol{g}_k \odot \boldsymbol{g}^m) \odot \boldsymbol{g}^j) \\ &= \mathcal{L}^k{}_{mj} (\boldsymbol{g}_k \odot (\boldsymbol{g}^m \odot \boldsymbol{g}^j)) \\ &\equiv \mathcal{L}^k{}_{mj} (\boldsymbol{g}_k \odot \boldsymbol{g}^m \odot \boldsymbol{g}^j) \qquad (57) \end{aligned}$$

参考文献

[1] 登坂宣好：有理連続体力学におけるテンソルの表現、日本計算数理工学会誌（計算数理工学レヴュー）、No.2012,pp.37-43, (2012)

[2] 笠原皓司：線形代数と固有値問題-スペクトル分解を中心としに-、現代数学社、 (1972)

[3] Martin.A.D. and V.J.Mizel : Introduction to Linear Algebra, McGraw-Hill Book Company, (1966)

[4] Gurtin, M.E. : An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, (2003)

[5] 新井朝雄：現代ベクトル解析の原理と応用、共立出版、(2006)